Уравнения математической физики

„Уравнения матем. физики" ≡ „Уравнения с частными производными" (УМФ ≡ УрЧП).

Уравнением с частными производными наз. уравнение, содержащее значки частных производных (ч.п.) от неизвестной функции многих переменных. Такие уравнения описывают сложные физические процессы в средах с несколькими степенями свободы (где есть пространственные координаты, время и т.д.).

Решением уравнения считается функция соответствующей гладкости, обращающая ур-е в верное тождество в рассматриваемой области. Понятие решения в каждой конкретной ситуации будет специально уточняться.

Порядок уравнения по определению равен порядку старшей ч.п., входящей в уравнение. Будут рассматриваться только уравнения 2-го порядка (классическая теория). Более того, фактически будут рассматриваться только три основные уравнения: Лапласа, волновое и теплопроводности в их различных вариантах и модификациях.

Основные уравнения математической физики (в простейшем виде):

I) $u_{xx}+u_{yy}=0$, $u=u(x,y)=?$ (двумерное ур-е Лапласа);

II) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u=u(x,t)=?$ (ур-е колебаний струны или одномерное волновое ур-е);

III) $u_t=a^2u_{xx}$, $u=u(x,t)=?$ (одномерное ур-е теплопроводности).

Здесь $a^2>0$ – физич. коэффициент (константа). Размерность „физического" ур-я всегда определяется по числу пространственных координат. t – „время".

Те же уравнения в трехмерном случае выглядят так:

I') $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$, $u=u(x,y,z)=?$ (трехмерное ур-е Лапласа);

II') $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$, $u=u(x,y,z,t)=?$ (трехмерное волновое ур-е);

III') $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$, $u=u(x,y,z,t)=?$ (трехмерное ур-е теплопроводности).

I') ~ I), II') ~ II), III') ~ III), т.е. соответственные ур-я подобны.

В то же время, каждое из перечисленных уравнений является типичным представителем своего весьма широкого класса. Рассмотрим этот вопрос с общей точки зрения.

§1. Приведение к каноническому виду линейных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассм. УрЧП в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Общий вид линейного ур-я 2-го порядка в $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, \dots, x_n), \quad u = u(x_1, \dots, x_n) = ? \qquad (1)$$

Здесь a_{ij}, b_i, c – заданные числа (ур-е с пост. коэффициентами). Считаем, что среди чисел a_{ij} есть хоть одно, отличное от нуля.

$f = f(x_1, \dots, x_n)$ – заданная функция (если $f \not\equiv 0$, то (1) – линейное неоднородное ур-е).

Линейное однородное ур-е:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0, \qquad u = u(x_1, \dots, x_n) = ? \qquad (1_0)$$

Уравнение наз. линейным однородным при выполнении след. условия:
если $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ – два решения ур-я, то $\alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)}$ – снова решение при $\forall$ константах α_1, α_2.
Для (1_0) это свойство очевидно выполнено. $\Rightarrow$ (1_0) – линейное однородное ур-е.

Неоднородное уравнение получается из однородного прибавлением заданной функции (неоднородного слагаемого), не зависящей от неизвестной функции u.

Терминология:

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{гл. часть (2-го порядка)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu}_{\text{младшие слагаемые}} = \underbrace{f(x_1, \dots, x_n)}_{\text{неодн. слагаемое}}.$$

Эквивалентные преобразования в главной части:

$$\underbrace{5 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}}_{\text{формально может быть так}} = \underbrace{7 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}}_{\text{приведенный вид}} = \underbrace{\frac{7}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{7}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}}_{\text{симметричный вид}}.$$

Можно всегда считать, например, что матрица $A = (a_{ij})$ является симметричной, $A^T = A$ – иногда удобно для теории.

Заметим, что основные уравнения I), II), III) являются частными случаями общего уравнения (1_0) в подходящем пр-ве $\mathbb{R}^n$ при соответствующих обозначениях переменных.

Оказывается, справедлив в некотором смысле обратный факт: всякое ур-е вида (1_0) можно привести к чему-то похожему на I), или на II), или на III).

<u>Теор.</u> (о приведении к канонич. виду). Для $\forall$ ур-я (1_0) существует замена координат $s = Px$, такая, что в координатах $(s_1, \ldots, s_n)$ ур-е приобретает вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial^2 u}{\partial s_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial u}{\partial s_i} + \gamma u = 0, \qquad (\tilde{I}_0)$$

где $\varepsilon_i \in \{1, -1, 0\}$ для $i = 1, \ldots, n$; $\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma$ - нек. числа.

<u>NB</u> Замена координат $s = Px$ имеет вид $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, где P - матрица перехода, $\det P \neq 0$. $\Rightarrow$ $x = P^{-1} s$ - обратная замена координат.

Координаты $s = (s_1, \ldots, s_n)$ наз. *каноническими*. Запись в виде $(\tilde{I}_0)$ наз. *записью уравнения в канонических координатах*. Вообще говоря, приведение ур-я к каноническому виду осуществляется неоднозначно, но количество „+", „−" и „0" в главной части $(\tilde{I}_0)$ будет всегда одинаковым. На этом основана следующая классификация ур-ий 2-го порядка.

<u>Классификация ур-ий 2-го порядка</u>

I) $|\varepsilon_i| = 1$ для $\forall i$ и все ε_i имеют одинаковые знаки $\Longrightarrow$ *ур-е эллиптического типа*.

<u>Пример</u>: $u_{s_1 s_1} + u_{s_2 s_2} = 0$ (ур-е Лапласа).

II) $|\varepsilon_i| = 1$ для $\forall i$, но среди ε_i есть разные знаки $\Longrightarrow$ *ур-е гиперболического типа*.

<u>Пример</u>: $u_{s_1 s_1} - u_{s_2 s_2} = 0$ (ур-е колебаний).

III) $\exists\, \varepsilon_k = 0$. $\Longrightarrow$ *ур-е параболического типа*.

<u>Пример</u>: $u_{s_1 s_1} - u_{s_2} = 0$ (ур-е теплопроводности).

Схема доказательства теоремы о приведении к канонич. виду

Рассм. уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0. \qquad (1_0)$$

Формально сопоставим его главной части квадратичную форму:

$Q(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – формальные переменные.

$A = (a_{ij})$ – матрица кв. формы, $Q(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$.

Факт 1. Если $\lambda = C\mu$ – преобразование координат с матрицей перехода C, то кв. форма $Q(C\mu)$ в новых координатах $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ имеет матрицу

$$\boxed{A' = C^T A C.}$$

Факт 2. $\exists$ каноническое преобр. координат $\lambda = C\mu$, т. что $Q(C\mu) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\mu_i^2$, где $\varepsilon_i \in \{1, -1, 0\}$. В этом случае

$$A' = C^T A C = \begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_n\end{pmatrix} \text{ – диаг. матрица.}$$

Канонические координаты можно получить методом Лагранжа. При этом кол-во „+", „–" и „0" среди ε_i не зависит от способа приведения к канонич. виду (закон инерции для кв. формы).

Рассмотрим теперь, что происходит с дифф. ур-ем (1_0) при замене переменных $s = \underline{P}x$:

$$\begin{pmatrix}s_1 \\ \vdots \\ s_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}.$$

Здесь $s_m = p_{m1}x_1 + p_{m2}x_2 + \dots + p_{mn}x_n$, $m = 1, 2, \dots, n$.

Выразим, как меняются производные $\frac{\partial}{\partial x_j}$ при таком преобр. координат.

По теореме о производной сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial s_2}\frac{\partial s_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial s_n}\frac{\partial s_n}{\partial x_j} = \left\{ \frac{\partial s_k}{\partial x_j} = p_{kj} \right\} =$$

$$= p_{1j}\frac{\partial u}{\partial s_1} + p_{2j}\frac{\partial u}{\partial s_2} + \ldots + p_{nj}\frac{\partial u}{\partial s_n}. \implies \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\frac{\partial u}{\partial s_k}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{kj}\frac{\partial u}{\partial s_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial s_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\sum_{l=1}^{n} p_{li}\frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} p_{kj}p_{li}\frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k} = \sum_{k,l=1}^{n} p_{li}p_{kj}\frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k}.$$

Подставим полученные выражения в главную часть уравнения (1_0):

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k,l=1}^{n} p_{li}p_{kj}\frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k}\right) = \sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p_{li}p_{kj}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{lk}\frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k}.$$

Здесь $\tilde{a}_{lk} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p_{li}p_{kj} = \sum_{i,j=1}^{n} p_{li}a_{ij}p_{kj} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{li}a_{ij}\right)p_{kj} = \{p_{kj} = p^T_{jk}\} =$

$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{li}a_{ij}\right)p^T_{jk}$ — l-я строка матрицы PA умножается на k-й столбец P^T.

<u>Факт 3</u>. При преобразовании координат $s = Px$ матрица старших коэффициентов в уравнении (1_0) изменяется по правилу

$$\boxed{\tilde{A} = PAP^T.}$$

<u>Вопрос</u>: как надо выбрать P для того, чтобы $\tilde{A}$ приняла наиболее простой вид?
<u>Очевидный ответ</u>: $P = C^T$, где C выбирается так же, как в факте 2.

В этом случае $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \ddots \; \varepsilon_n \end{pmatrix}$ и ур-е (1_0) перейдет к каноническ. виду (I_0).

Кол-во „+", „−" и „0" не будет зависеть от способа приведения к каноническ. виду (закон инерции). $\implies$ Наша классификация полностью обоснована. □

6

№3 Точное утверждение об эквивалентности уравнений (1_0) и $(\tilde{1}_0)$ выглядит так.

Пусть функция $u = \tilde{f}(s) = \tilde{f}(s_1, \dots, s_n)$ есть решение ур-я $(\tilde{1}_0)$ из класса C^2. Тогда функция $u = \tilde{f}(Px) = f(x_1, \dots, x_n)$ будет решением ур-я (1_0) (также из класса C^2). Более того, формула $u = \tilde{f}(Px) = f(x_1, \dots, x_n)$ описывает все возможные решения ур-я (1_0).

Здесь P – матрица, полученная по правилу $P = C^T$.